Functietheorie 19-3-98

Tentamenopgave

I

1. A. Zij $F(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ een functie gedefinieerd op het complexe vlak, met u en v reëel. Formuleer de Cauchy-Riemann vergelijkingen en geef op die manier noodzakelijk en voldoende voorwaarden waaronder er een holomorfe (i.e. complex analytische) functie $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ bestaat zodat $f(x+iy) = F(x,y)$.

B. Formuleer het principe van eenduidige analytische voortzetting voor holomorfe functies die op een lijnsegment aan elkaar gelijk zijn.

2. Laat de functies u en v in twee gevallen gedefinieerd zijn als volgt:

i. $u(x,y) = \cosh y \cos x$, $v(x,y) = -\sin x \sinh y$.

ii. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x,y) = 3x^2y + y^3$.

Zeg in beide gevallen of u en v het reële en imaginaire deel zijn van een holomorfe functie f, en zo ja, geef in dat geval een beknopte uitdrukking van $f(z)$ (i.e. zonder gebruik van x en y). Aanwijzing: Dit kan zeer gemakkelijk met behulp van B.

II

Zij $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ een holomorfe functie gedefinieerd op $\mathbb{C}$ door de gegeven convergente machtreeks.

1. Geef een uitdrukking voor a_n doormiddel van een integraal over een cirkel met straal $R > 0$.

2. Neem aan dat er constanten $M \geq 0$ en $N \in \mathbb{N}$ bestaan, zodat $|f(z)| \leq M(1+|z|)^N$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Toon aan dat f een polynoom is van de graad $\leq N$.

3. Zij $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ een holomorfe functie, zodat $L = \lim_{z \to \infty} f(z)$ bestaat. Wat kan je zeggen van $f(1)$? Wat kan je zeggen van f als bij $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^m}$ bestaat in $\mathbb{C}$?

III

1. Formuleer de stelling van Cauchy en de formule van Cauchy.

2. Bepaal de volgende contourintegralen waarbij Γ de positief georiënteerde gegeven cirkel is.

i. $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z+4}$, $\Gamma = \{z : |z| = 8\}$. ii. $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\operatorname{Arctan} z}{z-1} dz$, $\Gamma = \{z : |z-1| = 1\}$.

IV

1. Formuleer de residustelling.

2. Bereken de integralen

$$\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2-1} dz, \quad \int_\Gamma \frac{e^z}{z(z^2-2z+1)} dz$$

waar Γ de positief georiënteerde cirkel is $\Gamma = \{z : |z| = 2\}$.

3. Bereken de integraal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1} dx$$